Algebra Lineal: Transcripción de ejercicios

Ejercicio 1. Demuestre que $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$ si A es no singular.

Dan:

- $\det(A) \neq 0$

Piden:

- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$

Demostración:

Dado que $\det(A\,B) = \det(A\,)\det(B)$ y $A\,A^{-1} = I$, podemos relacionar la segunda ecuación con la primera, asumiendo a su vez por a). que A tiene inversa.

$$\begin{aligned}
\det(A\,A^{-1}) &= \det(A)\det(A^{-1}) \\
\det(I) &= \det(A)\det(A^{-1}) \\
1 &= \det(A)\det(A^{-1}) \\
\frac{1}{\det(A)} &= \det\left(A^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Observación 1. El determinante de la matriz identidad es 1 porque al ser una matriz triangular tanto inferior como superior, su determinante puede ser hallado con tal sólo multiplicar los elementos de su diagonal principal ($1x1x1$).

Observación 2. El determinante de A puede ser usado como denominador pues equivale a un número cualquiera.

Así concluye la demostración. Adicionalmente, por el resultado obtenido se puede establecer que el determinante de una matriz invertible A es el cociente entre 1 y el determinante de su inversa:

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$$